Выпуклые множества.

1. A и B – вып. мн-ва в E^n. Доказать, что $A \cap B$ – выпуклое множество.

Пусть $x', x'' \in A \cap B$ и $\lambda \in (0,1)$. Тогда

$$\lambda x' + (1-\lambda)x'' \in A, \quad \lambda x' + (1-\lambda)x'' \in B, \text{ т.е.}$$

$$\lambda x' + (1-\lambda)x'' \in A \cap B$$

Аналогично, $\bigcap\limits_{\alpha \in \mathcal{L}} A_\alpha$ – пересечение выпуклых мн-в A_α выпукло.

2. Пусть $f(x)$ – выпуклая ф-я. Тогда при любом C множество $X(c) = \{x \in E^n \mid f(x) \le C\}$ выпукло.

Если $f(x)$ – непрерывна, то $X(c)$ замкнуто

$x^k \to x^0 \quad f(x^k) \le C, \; k = 1, 2 \ldots \quad f(x^k) \to f(x^0) \le C \Rightarrow x^0 \in X(c).$

3. Пусть $f(x)$ - выпуклая непрерывная функция, определённая на выпуклом компакте $X \subset E^n$.

Тогда $X^0 = \operatorname{Argmin}_{x \in X} f(x)$ - выпукло.

$\forall x', x'' \in X^0$, $\lambda \in [0,1]$. $f(\lambda x' + (1-\lambda)x'') \leq$

$$\leq \lambda f(x') + (1-\lambda) f(x'') = \min_{x \in X} f(x) \Rightarrow$$

$$f(\lambda x' + (1-\lambda)x'') = \min_{x \in X} f(x) \Rightarrow$$

$$\lambda x' + (1-\lambda)x'' \in X^0.$$

Если $f(x)$ строго выпукла, то $X^0 = \{x^0\}$

Если $x' \neq x''$, то последнее неравенство строгое, что невозможно.

Определение. $x^0 \in X$ - крайняя точка выпуклого мн-ва X, если $\nexists\ x' \neq x''$ $\nexists\ \lambda \in (0,1)$: $x^0 = \lambda x' + (1-\lambda)x''$.

Пусть $X \subset E^n$ — выпуклый компакт.

Тогда мн-во X^{ext} крайних точек мн-ва X не пусто.

Д-во. $f(x)=\sum_{i=1}^{n} x_i^2$ — строго выпуклая ф-я. Тогда берём $x^0 \in \operatorname*{Argmax}_{x\in X} f(x)$ и $x^0 \in X^{ext}$.

Действительно, если $x^0 = \lambda x' + (1-\lambda) x''$, $x' \neq x'' \in X$, $\lambda \in (0,1)$.

$$f(x^0) < \lambda f(x') + (1-\lambda) f(x'') \le \lambda f(x^0) + (1-\lambda) f(x^0) = f(x^0)$$

(противоречие).

Теорема Каратеодори (лекции, без док-ва). Пусть $X \subset E^n$ — вып. комп.

$\forall x \in X \ \ \exists x^{(i)} \in X^{ext},\ \lambda_i > 0,\ i=\overline{1,k} \le n+1,\ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1,$

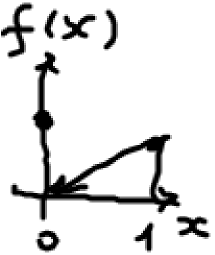
$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x^{(i)} = x.$$

Утверждение. Пусть $f(x)$ непрерывна и выпукла на выпуклом компакте X евклидова пр-ва. Тогда

$$\max_{x \in X} f(x) = \max_{x \in X^{ext}} f(x). \qquad (1)$$

Док-во. Пусть x^0 – точка максимума функции $f(x)$. По теореме Каратеодори $x^0 = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x^i$, $x^i \in X^{ext}$. Тогда

$$f(x^0) \le \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f(x^i) \le \max_{1 \le i \le k} f(x^i) \le f(x^0) \Rightarrow \max_{1 \le i \le k} f(x^i) = f(x^0) = \max_{x \in X} f(x) \text{ ч.т.д.}$$



Интересно, что если X^{ext} конечно, то (1) верно для любой выпуклой функции (не обязательно непрерывной на X). В самом деле, для $\forall x \in X$

$$f(x) = f\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x^i\right) \le \max_{x \in X^{ext}} f(x) \Rightarrow \sup_{x \in X} f(x) \le \max_{x \in X^{ext}} f(x) \le \sup_{x \in X} f(x).$$

При этом $\min_{x \in X} f(x)$ не всегда достигается.

Выпуклые множества.

Пусть $X=\{x\in E^m \mid \sum_{i=1}^{n} x_i = A,\ x_i\geq 0,\ i=1,\dots,n\}$

Доказать, что $X^{ext} = \{x^{(i)} = (0,\dots,\underset{i}{A},0,\dots,0),\ i=\overline{1,n}\}$

Докажем, что $x^{(i)}$ – кр. точка. Предположим, что $\exists\, x'\neq x''\in X$ и $\lambda\in(0,1)$, такие, что $x^{(i)}=\lambda x'+(1-\lambda)x''$.

Тогда $A=\lambda x_i'+(1-\lambda)x_i''$, $x_i', x_i''\leq A \Rightarrow x_i'=x_i''=A$

$\Rightarrow x_k'=x_k''\ \forall k\neq i \Rightarrow x'=x''$ (противоречие)

Покажем, что других кр. точек нет. Если $x\neq x^{(i)}\ \forall i$, то $\exists$ компонентов $x_k, x_j>0$. Но тогда определим

$x(\varepsilon)$: $x_i(\varepsilon)=\begin{cases} x_k-\varepsilon, & i=k\\ x_j+\varepsilon, & i=j\\ x_i, & i\neq k,j\end{cases}$ $x(\varepsilon)\in X$ при малом $\varepsilon\neq 0$ и $x=\dfrac{x(\varepsilon)+x(-\varepsilon)}{2}$ и x не кр. точка.

Аналогично доказывается, что для куба $X = \{x \in E^m \mid 0 \le x_i \le 1,\ i = \overline{1,m}\}$ множество $X^{ext} = \{x^M,\ M \subset \{1,\dots,m\}\}$, где

$$x_i^M = \begin{cases} 1, & i \in M \\ 0, & i \notin M \end{cases}.$$

Пусть $A = (a_{ij})_{m\times m}$ - невырожденная матрица и $X \subset E^m$ - выпуклый компакт. Тогда $Y = AX = \{y \in E^m \mid \exists\, x \in X : y = Ax + b\}$, где $b \in E^m$, также выпуклый компакт, а $Y^{ext} = AX^{ext}$.

Докажем выпуклость множества Y. Пусть $y', y'' \in Y$ и $\lambda \in (0,1)$. Тогда $\exists\, x', x''$: $y' = Ax' + b$, $y'' = Ax'' + b$ и $\lambda y' + (1-\lambda) y'' = A(\lambda x' + (1-\lambda)x'') + b \Rightarrow \lambda y' + (1-\lambda)y'' \in Y$

Докажем замкнутость Y. Пусть $y^k \to y^0$, $y^k \in Y$, возьмём последовательность $x^k \in X$: $y^k = Ax^k + b$. Тогда $x^k = A^{-1}y^k + b \to A^{-1}y^0 + b = x^0$. Но $x^0 \in X \Rightarrow y^0 \in Y$ ч.т.д.

Докажем, что $AX^{ext} \subset Y^{ext}$. Пусть $x \in X^{ext}$. Покажем, что $y = Ax + b \in Y^{ext}$. Если $\exists$ $y' \neq y'' \in Y$ и $\exists\ \lambda \in (0,1)$ такие, что $y = \lambda y' + (1-\lambda)y''$, то $\exists$ $x' \neq x'' \in X$: $y' = Ax' + b$, $y'' = Ax'' + b \Rightarrow$ $y = y' + (1-\lambda)y'' = A(\lambda x' + (1-\lambda)x'') + b$
$\Longrightarrow x = \lambda x' + (1-\lambda)x''$ (противоречие).

Аналогично доказывается, что если $y \notin AX^{ext}$, то $y \notin Y^{ext}$. Итак, $AX^{ext} = Y^{ext}$

Рассмотрим множество $X = \{x \in E^m \mid \sum_{i=1}^{m} x_i = A,\ x_i \geq x_i^0,\ i = \overline{1,n}\}$ где $\sum_{i=1}^{n} x_i^0 < A$.

Найти X^{ext}. Ответ $X^{ext} = \{x^{(i)}, i = \overline{1,m}\}$

$$x_k^{(i)} = \begin{cases} x_k^0, & k \neq i \\ A - \sum\limits_{k \neq i} x_i^0, & i = k. \end{cases}$$

Док-во. Рассмотрим отображение

$y = x - x^0$. $Y = \{y \mid \sum\limits_{i=1}^{m} y_i = A - \sum\limits_{i=1}^{m} x_i^0 = B,$

$y_i \geq 0, i = \overline{1,m}\}$

$Y^{ext} = \{y^{(i)}, i = 1, \dots, m\}$

$$y_k^{(i)} = \begin{cases} B, & i = k \\ 0, & i \neq k \end{cases}.$$

Тогда $x^{(i)} = y^{(i)} + x^0$ – кр. точки мн-ва X.

Пусть $X = \{x \in E^m \mid |x| \leq 1\}$ – единичный шар в E^m.

Доказать, что $X^{ext} = \{x \in X \mid |x| = 1\}$.

Пусть $X\subset E^m$, $Y\subset E^n$ — выпуклые компакты.

Тогда $X\times Y$ — выпуклый компакт, а

$(X\times Y)^{ext}=X^{ext}\times Y^{ext}$. Докажем последнее.

Пусть $(x,y)\in X^{ext}\times Y^{ext}$. Покажем, что $(x,y)\in(X\times Y)^{ext}$.

Действительно, в противном случае $\exists (x',y')\neq(x'',y'')$

$\exists\ \lambda\in(0,1)$ такие, что $(x,y)=\lambda(x',y')+(1-\lambda)(x'',y'')\Rightarrow$

$x=\lambda x'+(1-\lambda)x''$, $y=\lambda y'+(1-\lambda)y''$. Но либо $x'\neq x''$,

либо $y'\neq y''$. Получаем противоречие с тем, что

$x\in X^{ext}$, $y\in Y^{ext}$. Итак $X^{ext}\times Y^{ext}\subset(X\times Y)^{ext}$.

Аналогично доказывается, что $(X\times Y)^{ext}\subset X^{ext}\times Y^{ext}$.